DOI:10.13338/j.issn.1674-649x.2012.01.001

西 安 工 程 大 学 学 报

Journal of Xi'an Polytechnic University

第 26 卷第 1 期(总 113 期)　　2012 年 2 月　　Vol. 26,No. 1(Sum. No. 113)

文章编号:1674-649X(2012)01-0105-03

一个新的伪 Smarandache 函数及其均值

李喜罕

(西安航空职业技术学院 基础部,陕西 西安 710089)

摘要: $\forall n \in \mathbf{N}_+$,一个新的伪 Smarandache 函数 $C(n)$ 定义为 $C(n) = \min\{a+b: a,b \in \mathbf{N}, n \mid a(a+1)/2+b\}$,研究函数 $C(n)$ 的均值性质,并给出 $C(n)$ 的一个较强的均值公式. 利用初等方法以及 $C(n)$ 的性质,获得了该函数值的具体表示形式,给出了函数 $C(n)$ 的均值的几个较强的渐近公式.

关键词: 伪 Smarandache 函数; 均值; 渐近公式; 初等方法

中图分类号: O 156.4　　　　**文献标识码:** A

1 引言及结论

$\forall n \in \mathbf{N}_+$,著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 n 整除 $1+2+3+\cdots+k$,或者 $Z(n) = \min\{k: k \in \mathbf{N}, n \mid k(k+1)/2\}$. 从 $Z(n)$ 的定义容易推出它的前几项值为:$Z(1)=1$,$Z(2)=3$,$Z(3)=2$,$Z(4)=7$,$Z(5)=4$,$Z(6)=3$,$Z(7)=6$,$Z(8)=15$,$\cdots$. 关于 $Z(n)$ 的初等性质,许多学者进行了研究,获得了不少有意义的结果[1-7],文献[2]研究方程 $Z(n)+1=S(n)$ 及 $Z(n)=S(n)$ 的可解性. 文献[3]将这 2 个问题得到完全解决,即就是给出了这 2 个方程的所有正整数解. 文献[8]引入了一个几乎伪 Smarandache 函数,并讨论了它的各种性质.

本文引入一个新的伪 Smarandache 函数 $C(n) = \min\{a+b: a,b \in \mathbf{N}, n \mid a(a+1)/2+b\}$,然后利用初等方法研究它的基本性质,最终给出该函数各种均值的几个较强的渐近公式. 具体地说也就是证明了下面的结论:

定理 1 $\forall x \in \mathbf{R}, x>1$,有渐近公式 $\sum\limits_{n \leqslant x} C(n) = \sqrt{2} \cdot x^{3/2} + O(x)$.

定理 2 $\forall x \in \mathbf{R}, x>1$,有渐近公式 $\sum\limits_{n \leqslant x} \dfrac{1}{C(n)} = \sqrt{2x} \cdot \ln 2 + O(\ln x)$.

定理 3 $\forall x \in \mathbf{R}, x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} d(C(n)) = \frac{1}{2} x \ln x + x\left(2\gamma + \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\right) + O(x^{3/4}),$$

其中 $d(n) = \sum\limits_{d \mid n} 1$ 为 Dirichlet 除数函数,γ 为 Euler 常数.

收稿日期:2011-09-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科研专项基金(11JK0487)

作者简介:李喜罕(1969-),女,陕西省西安市人,西安航空职业技术学院讲师. E-mail: lxhawxy@163.com

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 定理的证明

利用初等方法研究函数 $C(n)$ 的基本性质. 事实上由 $C(n)$ 的定义不难计算出 $C(n)$ 的前几项值为 $C(1)=1$,$C(2)=2$,$C(3)=2$,$C(4)=3$,$C(5)=4$,$C(6)=3$,$C(7)=4$,$C(8)=5$,$C(9)=6$,$C(10)=4$,…. $\forall n\in\mathbf{N}_+$,$n>1$,显然存在惟一的正整数 m 使得满足不等式 $m(m+1)/2\leqslant n<(m+1)(m+2)/2$. 此时由 $C(n)$ 的定义不难推出 $a=m$,$b=n-m(m+1)/2$ 以及 $C(n)=m+n-m(m+1)/2$. 事实上由 $C(n)$ 的定义设 $C(n)=a+b$,则有 $a\leqslant m$,否则与 b 非负矛盾. 其次可以证明 a 不可能小于 m. 若不然,则 $a<m$,于是由 $n\mid a(a+1)/2+b$ 不难推出 $b\geqslant m\geqslant a+1$. 注意到 $n\mid a(a+1)/2+b=(a+1)(a+2)/2+b-a-1$. 显然 $a+1+(b-a-1)=b<a+b=C(n)$,这与 $a+b$ 最小矛盾,所以 $a=m$. 此时使得 n 整除 $a(a+1)2+b$ 的最小非负整数 $b=n-a(a+1)/2$. 所以有恒等式

$$C(n)=m+n-m(m+1)/2=n-m(m-1)/2=m+i, \tag{1}$$

其中 m 满足不等式 $m(m+1)\leqslant n<(m+1)(m+2)/2$,$0\leqslant i\leqslant m$.

2.1 定理1证明

应用式(1)来完成定理1的证明. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x>1$,显然存在唯一的正整数 M,使得满足不等式 $M(M+1)/2\leqslant x<(M+1)(M+2)/2$. 由此不等式不难推出

$$M=[\sqrt{2x+1/4}-1/2], \tag{2}$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

注意到式(2),于是由式(1)有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}C(n)&=\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{k(k+1)/2\leqslant n<(k+1)(k+2)/2}C(n)+\sum_{M(M+1)/2\leqslant n<x}C(n)=\\&\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{k(k+1)/2\leqslant n<(k+1)(k+2)/2}\left(n-\frac{(k-1)k}{2}\right)+\sum_{M(M+1)/2\leqslant n<x}\left(n-\frac{(M-1)M}{2}\right)=\\&\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{k}(k+i)+O\left(\left(\frac{M(M+2)}{2}-\frac{(M-1)M}{2}\right)\left(\frac{(M+1)(M+2)}{2}-\frac{M(M+1)}{2}\right)\right)=\\&\sum_{k=1}^{M-1}\left(k(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}\right)+O(M^2)=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{M-1}(k^2+k)+O(x)=\\&(1/4)(M-1)M(2M-1)+O(M^2)+O(x)=\\&(1/2)(\sqrt{2x+1/4}+O(1))^3+O(x)=\sqrt{2}\cdot x^{3/2}+O(x).\end{aligned}$$

于是完成了定理1的证明.

2.2 定理2的证明

注意到 $\forall y\in\mathbf{R}$,$y\geqslant 1$,由 Euler 求和公式可得

$$\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n}=\ln y+\gamma+O\left(\frac{1}{y}\right), \tag{3}$$

其中 γ 为 Euler 常数. 于是由式(1),(2),(3),有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{C(n)}&=\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{k(k+1)/2\leqslant n<(k+1)(k+2)/2}\frac{1}{C(n)}+\sum_{M(M+1)/2\leqslant n<x}\frac{1}{C(n)}=\\&\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k+i}+O\left(\sum_{i=0}^{M}\frac{1}{M+i}\right)=\\&\sum_{k=2}^{M-1}\left(\sum_{n\leqslant 2k}\frac{1}{n}-\sum_{n\leqslant k-1}\frac{1}{n}\right)+O(1)=\\&\sum_{k=2}^{M-1}\left(\ln(2k)-\ln(k-1)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)+O(1)=\\&\ln 2\cdot\sum_{k=2}^{M-1}1+O\left(\sum_{k=2}^{M}\frac{1}{k}\right)+O(1)=\end{aligned}$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$M \cdot \ln 2 + O(\ln M) = \sqrt{2x} \cdot \ln 2 + O(\ln x).$$

于是完成了定理 2 的证明.

2.3　定理 3 的证明

需要关于 Dirichlet 除数函数的均值定理[9-10]，即

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x\ln x + x(2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}). \tag{4}$$

于是应用渐近式(4)及式(1)，(2)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} d(C(n)) = &\sum_{k=1}^{M-1} \sum_{k(k+1)/2 \leqslant n < (k+1)(k+2)/2} d(C(n)) + \sum_{M(M+1)/2 \leqslant n < x} d(C(n)) = \\ &\sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i=0}^{k} d(k+i) + O\left(\sum_{i=0}^{M} d(m+1)\right) = \\ &\sum_{k=1}^{M-1} \left(\sum_{n \leqslant 2k} d(n) - \sum_{n \leqslant k-1} d(n)\right) + O(M\ln M) = \\ &\sum_{k=1}^{M-1} \left(k\ln k + k(2\gamma + 2\ln 2 - 1) + O(\sqrt{k})\right) + O(\sqrt{x}\ln x) = \\ &\int_1^{M-1} y\ln y \mathrm{d}y + (2\gamma + 2\ln 2 - 1)\int_1^{M-1} y\mathrm{d}y + O(M^{3/2}) + O(\sqrt{x}\ln x) = \\ &\frac{1}{2}M^2\ln M - \frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{2}M^2(2\gamma + 2\ln 2 - 1) + O(x^{3/4}) = \\ &\frac{1}{2}x\ln x + x\left(2\gamma + \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\right) + O(x^{3/4}).\end{aligned}$$

于是完成了定理 3 的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problem，not solution [M]. Chicago: Xiquan Publishing House，1993.

[2] KENICHIRO Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. Phoenix: Erhus University Press，1996.

[3] 刘燕妮，李玲，刘宝利. Smarandache 未解决的问题及其新进展 [M]. Phoenix: High American Press，2008.

[4] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 纺织高校基础科学学报，2009，22(1): 133-134.

[5] 苟素. Smarandache *kn* 数字数列及其一类均值性质 [J]. 纺织高校基础科学学报，2011，24(2): 250-252; 269.

[6] 闫晓霞. Smarandache LCM 的对偶函数与最小素因子函数的均方值 [J]. 纺织高校基础科学学报，2010，23(3): 323-325.

[7] 吕忠田. 关于 F. Smarandache 函数与除数函数的一个混合均值 [J]. 纺织高校基础科学学报，2007，20(3): 234-236.

[8] VYAWAHARE A W，PUROHIT K M. Near pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal，2004，14: 36-61.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社，2007.

[10] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag，1976.

A new pseudo-Smarandache function and its mean value

LI Xi-han

(Department of Basic Course，Xi´an Aeronautical Polytechnic Institute，Xi´an 710089，China)

Abstract: For any positive integer n，a new pseudo-Smarandache function $C(n)$ is defined as the smallest positive integers $a+b$ such that $n \mid a(a+1)/2$. That is，$C(n) = \min\{a+b: a, b \in \mathbf{N}, n \mid a(a+1)/2+b\}$. The mean value properties of $C(n)$ was studied，and several interesting mean value formulae was given. Using the elementary method and the properties of the function $C(n)$，the exact expressions for the value of the function $C(n)$ was given. A series of asymptotic formulae for the various mean value of $C(n)$ is obtained.

Key words: pseudo-Smarandache function; mean value; asymptotic formula; elementary method

编辑、校对: 黄燕萍

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net